'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 1st Semester Examination, 2024

UMATMIN10001-MATHEMATICS

CLASSICAL AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12
যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै ***चारवटा*** प्रश्नहरूको उत्तर लेखः

(a) Apply Descartes' rule of sign to find the number of imaginary roots of $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$. 3

Descartes এর চিহ্ন নীতি প্রয়োগ করে $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$-এর কাল্পনিক বীজের সংখ্যা নির্ণয় কর।

डेकार्टेसको नियम प्रयोग गरेर समिकरण $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$ का काल्पनिक मूलहरूको संख्या निर्णय गर।

(b) Find the values of p if 3
p এর মান নির্ণয় কর যদি

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^p = -1$$

यदि $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^p = -1$ भए p को मान निर्णय गर।

(c) Prove that the eigen values of a diagonal matrix are the diagonal elements of the matrix. 3
প্রমাণ কর একটি কর্ণ (diagonal) ম্যাট্রিক্সের eigen মানগুলি ম্যাট্রিক্সটির মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি হয়।
विकर्ण मेट्रिक्सका eigen मानहरू त्यस मेट्रिक्सका विकर्ण तत्वहरू हुन् भनि प्रमाण गर।

(d) State Cayley-Hamilton Theorem. Verify it for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. 3

Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি বিবৃত কর। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি যাচাই কর।

काइले-हेमिलटन उपपाद्य लेख। मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ मा काइले-हेमिलटन उपपाद्य परीक्षण गर।

(e) Find the rank of a matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 3

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ কো rank নির্ণয় গর।

(f) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3+5x^2+1=0$ find the value of $\sum\frac{1}{\alpha}$. 3

যদি α, β, γ; $x^3+5x^2+1=0$ সমীকরণের বীজ হয় তাহলে $\sum\frac{1}{\alpha}$-এর মান নির্ণয় কর।

যদি α, β, γ, সমিকরণ $x^3+5x^2+1=0$ কা মূলহরু ভএ $\sum\frac{1}{\alpha}$ কা মান নির্ণয় গর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any ***four*** questions: $6\times4=24$

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কুনৈ ***চার*** প্রশ্নহরুকো উত্তর লেখঃ

(a) Solve by Cardan's method: $x^3-12x+65=0$ 6

Cardan পদ্ধতিতে সমাধান করঃ $x^3-12x+65=0$

$x^3-12x+65=0$ লাই কার্ডনকো বিধিদ্বারা সমাধান গর।

(b) If a, b, c, d are four positive numbers, prove that 6

যদি a, b, c, d; চারটি ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ কর

যদি a, b, c, d চারবটা ধনাত্মক সংখ্যাহরু ভএ, প্রমাণ গরঃ

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq 16abcd$$

(c) If $x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{\pi}{7}$, then show that $x^7+\frac{1}{x^7}=-2$. 6

যদি $x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{\pi}{7}$ হয় তবে দেখাও যে $x^7+\frac{1}{x^7}=-2$।

যদি $x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{\pi}{7}$ ভএ, প্রমাণ গরঃ $x^7+\frac{1}{x^7}=-2$.

(d) Check whether the following homogeneous system of equations have non-trivial solutions. 6

নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের homogeneous সিস্টেমটির non-trivial সমাধান আছে কিনা যাচাই করঃ

তল দিএকা সমঘাত সমিকরণ প্রণালীকো non-trivial সমাধান হুন্ছ ? যদি ভএ খোজ্নু হোস।

$$-7x+2y-3z=0$$
$$x-2y-3z=0$$
$$x+2y+5z=0$$

Find them, if possible.

যদি সম্ভব হয় তাহলে সমাধানটি নির্ণয় কর।

(e) Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. 6

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ কা rank নির্ণয় গর।

(f) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ by elementary row operations. 6

প্রাথমিক সারি (elementary row) অপারেশনের মাধ্যমে $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত (inverse) টি নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ কা row operation দ্বারা inverse নির্ণয় গর।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any ***two*** questions: $12\times2 = 24$

যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

কুনৈ ***দুইবটা*** প্রশ্নহরুকো উত্তর লেখ:

(a) (i) Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 6

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির eigen মান এবং সংশ্লিষ্ট eigen ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ কা সবৈ eigen মান র eigen भ्याक्टर निर्णय गर।

(ii) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, then using Cayley-Hamilton Theorem, find A^9 and A^{-1}. 6

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ হয় তবে Cayley-Hamilton উপপাদ্যটির সাহায্যে A^9 এবং A^{-1} নির্ণয় কর।

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ भए, काइले-हेमेलटन उपपाद्य प्रयोग गरेर A^9 र A^{-1} को मान निर्णय गर।

(b) (i) Reduce the matrix $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7\end{bmatrix}$ to the normal form and find its rank. 6

$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে normal রূপ (form)-এ রূপান্তরিত কর এবং ইহার rank নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7\end{bmatrix}$ লাই সামান্য রূপমা পরিণত গরেঁ ত্যসকো rank নির্ণয় গর।

(ii) Find the values of k for which the system of equations 6

k-এর মান নির্ণয় কর যার জন্য

k কো ত্যো মান নির্ণয় গর, জসমা সমিকরণ প্রণালী

$$kx+y+z=1$$
$$x+ky+z=1$$
$$x+y+kz=1$$

will have (I) no solution, (II) unique solution and (III) more than one solution.

সমীকরণের সিস্টেমটির

(I) কোন সমাধান নেই। (II) একটি মাত্র সমাধান আছে। (III) একাধিক সমাধান আছে।

কো (I) সমাধান হুঁদৈন (II) বিশিষ্ট সমাধান হুন্ছ (III) এক ভন্দ ধেরৈ সমাধানহরু হুন্ছ।

(c) (i) Solve by Ferrari's method: $x^4+12x-5=0$ 6

Ferrari পদ্ধতিতে সমাধান করঃ $x^4+12x-5=0$

$x^4+12x-5=0$ লাই ফেরারিস বিধি দ্বারা সমাধান গর।

(ii) Find the condition that the cubic equation $x^3-px^2+qx-r=0$ should have its roots in GP. 6

এমন একটি শর্ত নির্ণয় কর যাতে $x^3-px^2+qx-r=0$ ঘন সমীকরণটির বীজগুলি GP তে থাকে।

ঘন সমীকরণ $x^3-px^2+qx-r=0$ কা মূলহরু (GP) জ্যামিতীয় প্রগতিমা হুনে স্থিতি নির্ণয় গর।

(d) (i) Prove that: 6

প্রমাণ করঃ

প্রমাণ গর:

$$\sin\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

(ii) Use De Moivre's theorem to find all the fourth roots of unity. 6

De Moivre-এর উপপাদ্যটির সাহায্যে একের চতুর্থ মূল (fourth roots of unity) গুলি নির্ণয় কর।

ডি মেইবর উপপাদ্য প্রযোগ গরের একাংককো (unity) চৌধো মূলহরু (fourth root) নির্ণয় গর।

——×——