UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor/Dsc 1st Semester Examination, 2024

MATHMIN101/MATHDSC101-MATHEMATICS

CLASSICAL ALGEBRA AND MATRIX THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / বিভাগ-ক

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12
যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै **चार** प्रश्नहरूका उत्तर देऊः

(a) Find the remainder when $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ is divided by $(2x - 3)$. 3
$2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$-কে $(2x - 3)$ দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয় তা নির্ণয় কর।
$2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ लाई $(2x - 3)$ ले भाग गर्दा शेष पत्ता लगाऊ।

(b) Find the rank of the matrix 3
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।
आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ को rank पत्ता लगाऊ।

(c) Show that the equations $x + y + z = 9$ and $3x - 2y + 4z = 3$ are consistent. 3
দেখাও যে $x + y + z = 9$ এবং $3x - 2y + 4z = 3$ সমীকরণদ্বয় সামঞ্জস্যপূর্ণ (consistent).
समीकरणहरू $x + y + z = 9$ अनि $3x - 2y + 4z = 3$ सङ्गति छन् भनी देखाऊ।

(d) Solve the equation $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$, it is given that $(1 + i)$ is a root. 3
$x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর, যেখানে প্রদত্ত আছে $(1 + i)$ ইহার একটি বীজ।
समीकरण $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$ को दिइएको एक मूल $(1 + i)$ भए यसलाई समाधान गर।

(e) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি যাচাই কর।
आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ को लागि Cayley-Hamilton प्रमेय प्रमाणित गर।

(f) If a, b, x are real and $\text{mod}(a+ib)=1$ prove that $(a+ib)^{ix}$ is purely real. 3

যদি a, b, x সকলে বাস্তব এবং $\text{mod}(a+ib)=1$ হয় তবে প্রমাণ কর $(a+ib)^{ix}$ একটি সম্পূর্ণ বাস্তব (purely real).

যদি a, b, x वास्तविक अनि $\text{mod}(a+ib)=1$ भए $(a+ib)^{ix}$ विशुद्ध वास्तविक (purely real) छ भनी प्रमाण गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / विभाग-ख

$6\times4=24$

2. Answer any *four* questions:
যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
कुनै चार प्रश्नहरूका उत्तर देऊ:

(a) If $\log\sin(\theta+i\phi)=\alpha+i\beta$ then prove that $2\cos 2\theta = e^{2\phi}+e^{-2\phi}-4e^{2\alpha}$ and $\cos(\theta-\beta)=e^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$. 6

যদি $\log\sin(\theta+i\phi)=\alpha+i\beta$ হয় তবে প্রমাণ কর $2\cos 2\theta = e^{2\phi}+e^{-2\phi}-4e^{2\alpha}$ এবং $\cos(\theta-\beta)=e^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$.

यदि $\log\sin(\theta+i\phi)=\alpha+i\beta$ भए प्रमाण गर $2\cos 2\theta = e^{2\phi}+e^{-2\phi}-4e^{2\alpha}$ अनि $\cos(\theta-\beta)=e^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$.

(b) If x, y, z are positive real numbers and $x+y+z=1$, prove that 6

যদি x, y, z; সকলেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x+y+z=1$ হয় তবে প্রমাণ কর

यदि x, y, z धनात्मक वास्तविक संख्याहरू अनि $x+y+z=1$ भए प्रमाण गर

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}$$

(c) Find the range of values of k for which the equation $x^4-26x^2+48x-k=0$ has four unequal roots. 6

k-এর মানের বিস্তার নির্ণয় কর যার জন্য $x^4-26x^2+48x-k=0$ সমীকরণটির চারটি বীজই অসমান।

समीकरण $x^4-26x^2+48x-k=0$ को चारवटा असमान मूलहरू भए k को मानहरूको दायरा पत्ता लगाऊ।

(d) Obtain the fully reduced normal form of the matrix 6

$$\begin{bmatrix}0&0&1&2&1\\1&3&1&0&3\\2&6&4&2&8\\3&9&4&2&10\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0&0&1&2&1\\1&3&1&0&3\\2&6&4&2&8\\3&9&4&2&10\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সম্পূর্ণ হ্রাস স্বাভাবিক রূপটি (fully reduced normal form) নির্ণয় কর।

আব্যূহ $\begin{bmatrix}0&0&1&2&1\\1&3&1&0&3\\2&6&4&2&8\\3&9&4&2&10\end{bmatrix}$ को पूर्ण रूपमा घटाइएको सामान्य रूप (fully reduced normal form) प्राप्त गर।

(e) Solve by Cardon's method $x^3-12x+65=0$. 6

$x^3-12x+65=0$ সমীকরণটিকে Cardon পদ্ধতিতে সমাধান কর।

Cardon को पद्धतिद्वारा समाधान गर: $x^3-12x+65=0$

(f) Find the inverse of the matrix $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$ by using elementary row operations. 6

প্রাথমিক সারি অপারেশন (elementary row operation)-এর সাহায্যে $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত (inverse) ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

प्राथमिक पङ्क्ति सञ्चालनको सहायतामा $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$ को inverse पत्ता लगाऊ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / विभाग-ग

Answer any *two* questions 12×2 = 24
যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও
कुनै दुई प्रश्नहरूका उत्तर देऊ

3. (a) Solve the equation $x^4+3x^3+x^2-2=0$ by Ferrari's method. 6
Ferrari পদ্ধতিতে $x^4+3x^3+x^2-2=0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর।
Ferrari को विधि ले समीकरण $x^4+3x^3+x^2-2=0$ लाई समाधान गर।

(b) If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ are n-distinct roots of the equation $x^n-1=0$, then prove that 6
$$(a+b\alpha_1)(a+b\alpha_2)\cdots\cdots(a+b\alpha_n)=a^n+(-1)^{n-1}b^n$$
যদি $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$; $x^n-1=0$ সমীকরণটির n সংখ্যক স্বতন্ত্র বীজ হয় তাহলে প্রমাণ কর
$$(a+b\alpha_1)(a+b\alpha_2)\cdots\cdots(a+b\alpha_n)=a^n+(-1)^{n-1}b^n$$
यदि $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ समीकरण $x^n-1=0$ को n-अलग मूलहरू भए, प्रमाण गर
$$(a+b\alpha_1)(a+b\alpha_2)\cdots\cdots(a+b\alpha_n)=a^n+(-1)^{n-1}b^n$$

4. (a) Determine the conditions of a and b for which the system 6
$$x+y+z=1$$
$$x+2y-z=b$$
$$5x+7y+az=b^2$$
admits of (i) only one solution.
(ii) no solution.
(iii) many solutions.
$$x+y+z=1$$
$$x+2y-z=b$$
$$5x+7y+az=b^2$$
সিস্টেমটির (i) শুধুমাত্র একটি সমাধান আছে
(ii) কোন সমাধান নেই
(iii) একাধিক সমাধান আছে।
এমন a এবং b-এর মানগুলি নির্ণয় কর।
a অনি b को सर्तहरू निर्धारण गर जसको लागि समीकरण समूह
$$x+y+z=1$$
$$x+2y-z=b$$
$$5x+7y+az=b^2$$

को (i) एकमात्र समाधान हुन्छ

(ii) समाधान नै हुँदैन

(iii) एकभन्दा बढी समाधान हुन्छ।

(b) If $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 4+2

then show that for every integer $n\ (\geq 3)$, $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$. Hence evaluate A^{50}.

যদি $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ হয় তবে প্রত্যেকটি পূর্ণসংখ্যা $n\ (\geq 3)$ -এর জন্য প্রমাণ কর

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$. উক্ত হইতে A^{50} -এর মান নির্ণয় কর।

যদি $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ भए देखाऊ कि सबै पूर्ण सङ्ख्या $n\ (\geq 3)$ को लागि

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ हुन्छ। A^{50} मूल्याङ्कन गर।

5. (a) If $x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ where θ is real, prove that $\theta = -i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+i\frac{x}{2}\right)$. 6

যদি $x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$, যেখানে θ একটি বাস্তব, তাহলে প্রমাণ কর $\theta = -i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+i\frac{x}{2}\right)$.

यदि $x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ भए, जहाँ θ वास्तबिक हुन्, प्रमाण गर $\theta = -i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+i\frac{x}{2}\right)$

(b) If $a, b, c, d > 0$ and $a+b+c+d=1$, prove that 6

যদি $a, b, c, d > 0$ এবং $a+b+c+d=1$ হয় তবে প্রমাণ কর

यदि $a, b, c, d > 0$ अनि $a+b+c+d=1$ भए प्रमाण गर

$$\frac{a}{1+b+c+d}+\frac{b}{1+a+c+d}+\frac{c}{1+a+b+d}+\frac{d}{1+a+b+c}\geq\frac{4}{7}$$

6. (a) Solve the equation $x^4-4x^3-4x^2-4x-5=0$ given that two roots α, β are connected by the relation $2\alpha+\beta=3$. 6

$x^4-4x^3-4x^2-4x-5=0$ সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে প্রদত্ত আছে দুটি বীজ α এবং β; $2\alpha+\beta=3$ সম্পর্ক দ্বারা সংযুক্ত।

दुईवटा मूलहरू α, β सम्बन्ध $2\alpha+\beta=3$ द्वारा जोडिएको समीकरण $x^4-4x^3-4x^2-4x-5=0$ लाई समाधान गर।

(b) Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following real matrix: 6

নিম্নলিখিত বাস্তব ম্যাট্রিক্সটির eigen মান এবং সংশ্লিষ্ট eigen ভেক্টরগুলি নির্ণয় করঃ

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

आव्यूह $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ को eigen मानहरू र अनि सम्बन्धित eigen सदिशहरू पत्ता लगाऊ।

——×——